

ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ по дисциплине «Математика»

дата 27.01.2024

Новый материал (конспект в рабочую тетрадь)

Тема: «Непрерывность функции. Метод интервалов»

Определение: Функция называется непрерывной в точке x_0 , если $f(x)$ стремится к $f(x_0)$ при стремлении x к x_0 . При этом $f(x) - A = f(x) - f(x_0) = \Delta f$. Если функция f непрерывна в каждой точке некоторого промежутка A , то эта функция будет являться непрерывной на всем промежутке A . А сам промежуток A , называют в таком случае **промежутком непрерывности** функции f .

Пример:

Является ли функция f непрерывной в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$, если:

$$\begin{aligned} \text{а) } f(x) &= x^4 - x + 1; & \text{б) } f(x) &= \begin{cases} x+1 & \text{при } x \leq -1, \\ x^2 - x & \text{при } x > -1; \end{cases} \\ \text{в) } f(x) &= \begin{cases} 1 - x^2 & \text{при } x < 0, \\ 5 - 2x & \text{при } x \geq 0; \end{cases} & \text{г) } f(x) &= 2x - x^2 + x^3? \end{aligned}$$

Решение:

а) в точке x_1 -непрерывна, в x_2 -непрерывна

б) в точках x_1 непрерывна, в точке x_2 – не является непрерывной

в) в точке x_1 -не является непрерывной, в x_2 –непрерывна

г) непрерывна в x_1 и x_2

Свойство непрерывных функций: Если на некотором интервале $(a;b)$ функция f непрерывна и не обращается в нуль, то на этом интервале она будет сохранять постоянный знак.

На этом свойстве основан метод решения неравенств с одной переменной – метод интервалов.

Метод интервалов

Метод интервалов — это специальный алгоритм, предназначенный для решения сложных неравенств вида $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.

Алгоритм решения неравенств методом интервалов

- 1 шаг. Перенести все части неравенства в одну сторону так, чтобы с другой остался только 0.
- 2 шаг. Найти нули функции, для этого необходимо решить уравнение $f(x) = 0$.
- 3 шаг. Начертить числовую прямую и отметить на ней все полученные корни. Таким образом, числовая прямая разобьется на интервалы.
- 4 шаг. Определить знаки на каждом интервале. Для этого необходимо подставить любое удобное значение в $f(x)$ и определить, какой знак будет иметь функция на данном интервале.

Пример: решить неравенство $x^2 - 5x + 4 \geq 0$

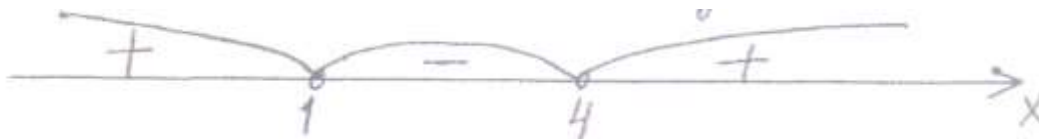
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9;$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{9} = 3.$$

$$x_1 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4;$$

$$x_2 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$



Чтобы определить знак функции на интервалах, достаточно определить знак на одном из интервалов, а дальше будет идти чередование знаков. Например, определим знак в крайнем правом интервале. Для этого возьмем любое число из этого интервала, большее 4, и подставим его в первоначальную функцию в левой части неравенство. В данном случае можно взять, например, число $x=5$.

$$5^2 - 5 \cdot 5 + 4 = 25 - 25 + 4 = 4 > 0$$

Получим число положительное, поэтому в крайнем правом интервале ставим знак плюс +. Тогда в оставшихся двух интервалах знаки будут чередоваться. В ответ выпишем те интервалы, на которых функция имеет знак плюс +, т.к. наше неравенство было со знаком больше нуля (>0).

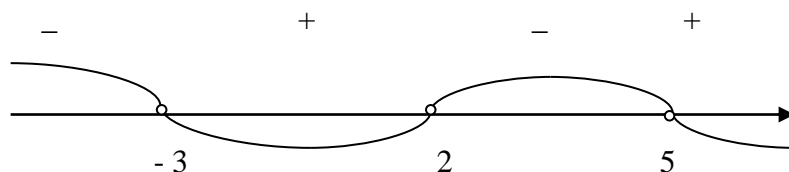
$$\text{Ответ: } (-\infty; 1) \cup (4; \infty).$$

Пример: решить неравенство $(x+3)(x-2)(x-5) > 0$

$$(x+3)(x-2)(x-5) = 0,$$

$$x = -3, x = 2, x = 5.$$

Эти точки разбивают всю числовую прямую на промежутки внутри каждого из которых функция сохраняет свой знак.



Берем любое число в правом крайнем интервале:

$$f(6) = (6+3)(6-2)(6-5) > 0,$$

$$f(x) > 0 \text{ при } x \in (-3; 2) \cup (5; +\infty).$$

$$\text{Ответ: } (-3; 2) \cup (5; +\infty).$$

Пример: решить неравенство: $\frac{x^2 - 7x + 6}{x - 2} \leq 0$

Найдем точки, в которых наша функция не имеет никакого знака, т.е. равна нулю:

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 6 = 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases}$$

Решим отдельно каждое из данных двух уравнений.

$$x^2 - 7x + 6 = 0,$$

$$D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25;$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{25} = 5.$$

$$x_1 = \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6;$$

$$x_2 = \frac{7-5}{2} = \frac{2}{2} = 1;$$

Решим второе уравнение:

$$x - 2 \neq 0$$

$$x \neq 2$$

Отметим полученные числа 6; 1 и 2 на числовой прямой.

Числа 1 и 6 отметим сплошными точками, т.к. неравенство у нас нестрогое (≤ 0), а число 2 отметим пустой точкой, потому что в ней дробь не имеет смысла, так как в этой точке знаменатель равен нулю.



Определим знак функции на одном из интервалов, например, в крайнем левом. Для этого возьмем из этого интервала число, расположенное левее числа 1, например, число 0.

Подставим число 0 вместо x в нашу функцию, т.е. в дробь, стоящую в левой части неравенства:

$$\frac{0^2 - 7 \cdot 0 + 6}{0 - 2} = \frac{0 + 0 + 6}{-2} = \frac{6}{-2} = -3 < 0.$$

Получим число -3. Поэтому в крайнем левом интервале ставим знак минус, а дальше по интервалам будет идти чередование знаков. В ответ выписываем интервалы со знаком минус, т.е. Наше неравенство имело знак ≤ 0 .

Ответ: $(-\infty; 1] \cup (2; 6]$.

Домашнее задание: проработать конспект по тетради

Конспект и задания отправляем на электронную почту oles.udalova@yandex.ru